

Le présent document donne une démonstration du lemme de Cesàro, selon lequel une suite réelle convergeant vers un réel l converge également en somme vers la même limite l .

Somme de Cesàro. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergeant vers un nombre fini l . Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ converge vers l .

Preuve. On a, par hypothèse sur la convergence de (u_n) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

D'autre part, on a, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|v_n - l| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - l \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (u_k - l) \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - l) + \sum_{k=n_0}^n (u_k - l) \right|$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - l) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n |u_k - l|$$

On applique alors au deuxième terme l'inégalité (1), pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n |u_k - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{(n - n_0 + 1)\varepsilon}{2n}$$

D'où la majoration, comme $n \geq n_0$ et donc $(n - n_0 + 1) \leq n$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n |u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, le premier terme étant une somme finie de réels, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - l) \right| = 0$$

Ce qui donne, d'après la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - l) \right| \leq \varepsilon'$$

En prenant alors $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ et en posant $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_2, |v_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui permet donc d'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = l$$